Tassellazioni nobilissime

di Lucio Saffaro

Una tassellazione è un insieme di poligoni adiacenti che ricopre l'intero piano: sono ben note quelle di soli quadrati, di soli esagoni (che sono le più frequentemente adoperate nelle pavimentazioni) e di soli triangoli. Queste tre, dette regolari, sono le uniche costituite da un solo tipo di poligono regolare e con un solo tipo di vertici (in ogni loro vertice vi è sempre lo stesso numero di poligoni, rispettivamente 4, 3 e 6). Accanto a queste, sono note altre 8 tassellazioni formate da due o più tipi di poligoni regolari, ma sempre con un solo tipo di vertici, e 124 con diversi tipi di vertici (fino a un massimo di 7 tipi). Vi sono ancora varie centinaia di tassellazioni formate da uno o più tipi di poligoni, non più regolari (e quindi anche concavo-convessi) e con uno o più tipi di vertici(1).

Sull'esempio di Luca Pacioli(2) abbiamo già chiamato nobilissimi i poliedri i cui spigoli abbiano tutti la medesima lunghezza(3). Ora ci proponiamo di descrivere nuove tassellazioni che chiameremo ancora nobilissime perché non solo formate da poligoni convessi con i lati uguali, ma anche perché dotate della stessa simmetria delle tre tassellazioni regolari. A questo scopo costruiamo simmetricamente all'interno di un quadrato un sistema di segmenti, tutti della stessa lunghezza (quelli diretti perpendicolarmente ai lati del quadrato saranno lunghi la metà), e tali da formare solo poligoni convessi. Basterà quindi costruire una tassellazione regolare di quadrati con il quadrato così strutturato per ottenere una nuova tassellazione che ricopre l'intero piano e soddisfa le condizioni richieste. Il più semplice sistema possibile è costituito dai quattro segmenti che uniscono il centro del quadrato con i vertici: una tale struttura, infinitamente replicata, riproduce evidentemente la tassellazione regolare di quadrati. Il secondo per semplicità fra i possibili sistemi di segmenti (fig.1, primo quadrato) conduce ancora a una tassellazione nota di quadrati ed esagoni quasi regolari. I successivi sistemi di segmenti aumentano via via la loro complessità, seguendo un procedimento naturale di esaustione delle possibilità. Si ottengono così 30 modi diversi di strutturare l'interno di un quadrato, e quindi 30 tassellazioni nobilissime. Si noterà che tanto il secondo quanto l'ottavo quadrato portano alla costruzione della nota tassellazione archimedea di quadrati e ottagoni, mentre il sesto quadrato conduce a una delle 20 tassellazioni con più tipi di poligoni regolari e due tipi di vertici. Il diciottesimo quadrato crea una tassellazione con due soli tipi di poligoni, pentagoni e ottagoni. Altrettanto notevole è quella indotta dal ventiseiesimo quadrato, che risulta formata solo da pentagoni e decagoni: dividendo questi ultimi in due con un segmento che ne unisca due vertici opposti, si ottiene una tassellazione (non più nobilissima, ma solo nobile in quanto costituita da due tipi di lati) di soli pentagoni. Si noterà ancora che solo due tassellazioni sono uniformi, cioè presentano in ogni vertice lo stesso numero di poligoni: precisamente quella generata dal terzo quadrato (con 4 poligoni a ogni vertice) e quella generata dal dodicesimo quadrato (con 3 poligoni a ogni vertice). E si noterà infine che alcuni quadrati rappresentano sistemi che ammettono, mantenendo la loro fisionomia topologica, piccoli spostamenti dei vertici (ciascuno di questi quadrati darà quindi luogo a una classe continua di tassellazioni). Tra tutti i 30 quadrati finora trovati scegliamo il ventiseiesimo per ricavarne la corrispondente tassellazione (fig.2).

A questo punto sorgono alcune domande inevitabili. Esistono altri sistemi di segmenti oltre i 30 elencati? Certamente sì: per esempio esiste il sistema avente al centro quattro semi-esagoni quasi regolari, simile ai quattro pentagoni del diciottesimo quadrato, che però porta alla stessa tassellazione formata dal primo quadra-

Fig.1
Tavola di possibili sistemi di segmenti isometrici entro il quadrato.

Fig.2
Tassellazione isometrica del piano con pentagoni e decagoni.

Fig.3, 4, 5, 6
Tassellazioni isometriche del piano con quadrati, rombi, pentagoni, esagoni, ottagoni e dodecagoni.

Fig.7,8
Tassellazioni ottenute da quella della fig.2 estesa ad ambiti triangolari ed esagonali.