Terne pitagoriche e Teorema di Pitagora

Sembra che Talete (il fondatore della Scuola Jonica) abbia riportato che in Egitto venivano usate misure proporzionali ai valori interi 3,4,5 per tracciare triangoli rettangoli.

È evidente il vantaggio che, sia nell'agrimensura sia nell'architettura, poteva derivare dalle possibilità di tracciare angoli retti con terne di numeri interi.

Secondo Teone di Smirne si era a conoscenza fin dai tempi di Platone che, per qualsiasi valore intero e dispari n, si aveva la terna pitagorica:

$$n; \quad \frac{n^2-1}{2}; \quad \frac{n^2+1}{2};$$

$$\text{per } n=3 \quad \frac{9-1}{2}=4 \qquad \frac{9+1}{2}=5$$

$$\text{per } n=5 \quad \frac{25-1}{2}=12 \qquad \frac{25+1}{2}=13$$

$$\text{per } n=7 \quad \frac{49-1}{2}=24 \qquad \frac{49+1}{2}=25$$

Un'altra serie di terne, riferita da Proclo, è costituita da:

$$2\,n; \quad n^2-1; \quad n^2+1; \quad \text{con } n \neq 1$$

con n pari o dispari.

Ad esempio:

$$n=2 \quad 2\,n=4 \quad n^2-1=3 \quad n^2=1=5$$

$$n=3 \quad 2\,n=6 \quad n^2-1=8 \quad n^2=1=10$$

$$n=4 \quad 2\,n=8 \quad n^2-1=15 \quad n^2=1=17$$

Indipendentemente dalle terne pitagoriche, il gran merito di Talete è stato quello di avere posto le basi necessarie affinché le conoscenze scientifiche relative alla geometria piana potessero trasformarsi in una scienza esatta.

Tale operazione di trasformazione durò alcuni secoli.

Nel III sec. a.C. Euclide riportò in maniera organica nei suoi "Elementi" tutte le nozioni scientifiche sviluppate dagli scienziati nei tre secoli circa trascorsi dagli inizi del VI sec. a.C. agli inizi del III sec. a.C.

Nei tredici libri dell'opera vengono trattati diversi argomenti; la geometria piana, la teoria delle proporzioni per grandezze omogenee, la teoria delle proporzioni applicata alla geometria piana, i numeri interi, i numeri incommensurabili, la geometria solida elementare.

Nel primo libro Euclide *dimostra* che in qualsiasi triangolo rettangolo il quadrato dell'ipotenusa è uguale alla somma dei quadrati dei due cateti; e ciò indipendentemente dal fatto che i tre segmenti siano rappresentabili con numeri interi.

Si premette che Euclide, nella proposizione 4 del I libro, dimostra che se due triangoli hanno uguali due lati e l'angolo compreso, essi sono uguali.

Nella proposizione 41 (sempre del I libro) dimostra che se un parallelogramma ed un triangolo hanno la stessa base e la stessa altezza, l'area del parallelogramma è il doppio dell'area del triangolo (Fig. 1).

Stabilito quanto sopra, nella proposizione 47 del I libro, Euclide riporta la dimostrazione del Teorema di Pitagora (Fig. 2).

Sui lati del triangolo rettangolo *ABC* costruisce i tre quadrati. Dal vertice A traccia il segmento *AL* parallelo a *BD* ed il segmento *AD*.

I due triangoli *FBC* ed *ABD* sono uguali in quanto:

- I lati *FB* ed *AB* sono uguali
- I lati *BC* e *BD* sono uguali
- Gli angoli *FBC* ed *ABD* sono uguali in quanto somme dell'angolo comune ABC e di un angolo retto.

Consideriamo ora il quadrato *ABFG* ed il triangolo *FBC*.

Essi hanno la stessa base *FB* e la stessa altezza *BA*.

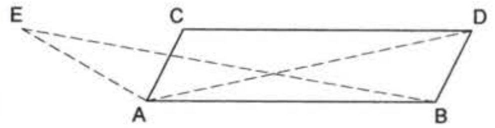
Quindi per la proposizione 41, l'area di *ABFG* è il doppio dell'area del triangolo *FBC*; ma dato che *area FBC* = *area ABD*, si ha *area ABFG* = (*area ABD*).

Consideriamo ora il triangolo *ABD* ed il rettangolo *BDLM*: essi hanno la stessa base *BD* e la stessa altezza *BM*.

Per la proposizione 41 abbiamo:
area BDLM = 2 × (*area ABD*).

E quindi, l'area del quadrato *ABFG* è uguale all'area del rettangolo *BDLM*. Analogamente si può dimostrare che:
area ACKH = area LECM

Fig. 1



Siano *ABCD* il parallelogramma dato ed *ABE* il triangolo con il vertice *E* sul prolungamento della retta *CD*.

Tracciamo la diagonale *AD.I* due triangoli *ACD* ed *ADB* sono uguali tra loro e quindi:

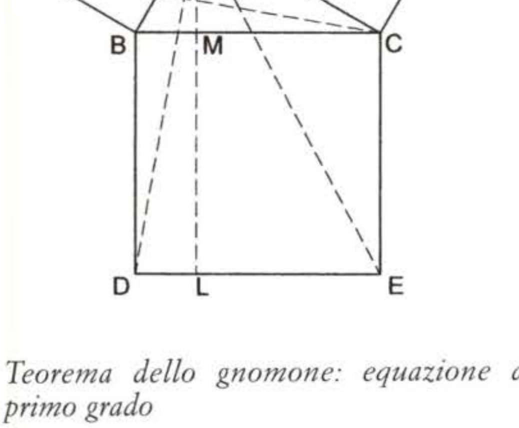
$$area\ ADB = \frac{1}{2} \times (area\ ABCD).$$

I due triangoli *ABD* ed *ABE* sono uguali avendo la stessa base e la stessa altezza.

Quindi,

$$area\ ABE = \frac{1}{2} \times (area\ ABCD).$$

Fig. 2

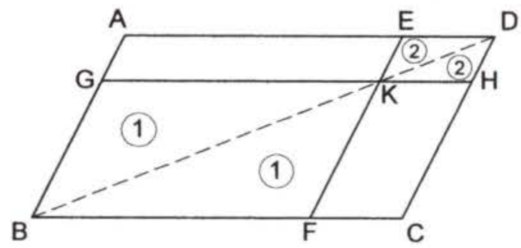


Teorema dello gnomone: equazione di primo grado

Euclide nel primo libro dei suoi "Elementi", alla proposizione 43 dimostra un teorema di particolare importanza.

Diamo preliminarmente alcune definizioni:

Fig. 3



– In un parallelogramma il segmento che misura due vertici opposti è detto "diagonale".

– Preso un punto *K* della diagonale (Fig. 3), mandando per tale punto le parallele ai lati, si ottengono quattro parallelogrammi; i due parallelogrammi *GBFK* ed *EKHD* sono definiti "parallelogrammi intorno alla diagonale"; gli altri due *AGKE* e *KFCH* sono definiti "complementi ai parallelogrammi intorno alla diagonale".

– L'insieme dei due complementi e di uno dei parallelogrammi intorno alla diagonale è detto "gnomone".

Il teorema dimostra che le aree dei due complementi sono uguali. La dimostrazione è immediata:

– La diagonale BD divide i due parallelogrammi nei due triangoli uguali *BAD* e *BCD*.

– Se da tali triangoli togliamo i triangoli *GBK* e *BFK* (uguali tra loro) ed i triangoli *KED* e *KHD* (uguali tra loro) ciò che resta deve essere uguale.

È opportuno notare che utilizzando tale teorema è possibile risolvere geometricamente un'equazione di primo grado del tipo:

$$x \cdot c = a \cdot b$$

dove x è incognito ed a, b, c sono dati.

In termini geometrici il problema può essere posto nel seguente modo:

"Assegnati tre segmenti a, b, c, determinare il segmento x tale che l'area del rettangolo di lati "x" e "c" risulti uguale all'area del rettangolo avente come lati "a" e "b" (Fig. 4).