Si vuole qui presentare una ricostruzione logico-matematica della teoria della relatività ristretta, che appare molto soddisfacente da un punto di vista precipuamente filosofico.

Il primo assunto è quello di mostrare che, una volta scelto un certo apparato matematico per la descrizione di un fenomeno fisico, questo apparato contiene già a priori tutto ciò che esso stesso può descrivere, niente di più e niente di meno, a prescindere da ogni aspetto fisico di quel fenomeno, che potrà poi essere introdotto solo alla fine, per dare la dovuta connotazione realistica alla teoria.

Il secondo assunto è quello di fornire una costituzione logica più naturale e intuitiva alla teoria della relatività ristretta.

Si presuppongono noti tutti i concetti di base, dai sistemi inerziali R_i in moto reciproco uniforme alle trasformazioni stesse che reggono la teoria.

Il passo decisivo è stato ovviamente quello con cui si è passati dalle equazioni di trasformazione galileiane

$$(1) \quad \left| \begin{array}{l} S = s - Vt \\ T = t \end{array} \right.$$

a quelle di Lorentz

$$(2) \quad \left| \begin{array}{l} S = As + Bt \\ T = Cs + Dt \end{array} \right.$$

quando cioè si è lasciato cadere l'assioma newtoniano del tempo assoluto T = t uguale per tutti i sistemi di riferimento R_i.

Qui si farà uso della consueta notazione abbreviata per la descrizione delle trasformazioni da un sistema di riferimento R_2 a un sistema R_1, quando R_2 si muova con velocità costante V rispetto a R_1, lungo una sola dimensione. Le coordinate spazio-temporali di R_2 saranno la coppia S, T mentre quelle di R_1 saranno la coppia s, t.

Da un punto di vista di "architettura" delle formule, le quattro variabili A, B, C, D possono venire pensate come quattro "colonne" simmetriche che sostengono, come l'atrio di un tempio greco, tutta la struttura relativistica. Se, come ha suggerito P. A. M. Dirac, è meglio scegliere tra due teorie quella di maggiore rilevanza estetica, allora lo stesso Newton avrebbe potuto scegliere dapprima le trasformazioni (2), magari per poi concludere che doveva risultare A = 1, B = -V, C = 0, D = 1.

Si procederà ora alla determinazione delle variabili A, B, C, D con semplici considerazioni matematiche. È utile prendere in esame anche le trasformazioni inverse delle (2) che sono, chiamato Δ il determinante AD - BC,

$$(3) \quad \begin{array}{l} s = (DS - BT) / \Delta \\ t = (-CS + AT) / \Delta . \end{array}$$

Il determinante Δ' delle (3) risulta essere

$$(4) \quad \Delta' = (DA - BC) / \Delta^2 = \Delta / \Delta^2 = 1 / \Delta,$$

relazione fondamentale che verrà usata in seguito.

A questo punto si può già ricavare la legge relativistica di composizione delle velocità.

Se S = vT è l'equazione oraria del moto di un mobile che si muove con velocità costante v rispetto a R_2, per trovare l'equazione corrispondente riferita a R_1 basterà ricorrere alle (2): (As + Bt) = v (Cs + Dt), da cui s (A - Cv) = (Dv - B) t. Allora la velocità v del mobile rispetto a R_1 sarà

$$(5) \quad v = \frac{Dv - B}{A - Cv} .$$

Si vuole ora ricordare la nozione di proiettività , ben nota agli architetti per i loro studi di geometria analitica. È una sua caratteristica la corrispondenza tra i punti all'infinito I_∞ e J'_∞ e i punti al finito I' e J, ciò che non comporta alcuna contraddizione geometrica, ma che diventa una grave contraddizione qualora se ne dia un'interpretazione fisica. Ed è ciò che accade proprio in questo caso, poiché l'equazione

$$(6) \quad Cvv - Av + Dv - B = 0$$

che si deduce dalla (5), non è altro che l'equazione

$$(7) \quad axx' + bx + cx' + d = 0$$

che descrive la relazione analitica tra due punti corrispondenti su due punteggiate proiettive.

Vi è dunque una profonda contraddizione insita fin dall'inizio all'interno dell'apparato matematico, poiché vi si cela una subdola presenza di grandezze infinite: infatti quando nella (5) si ponga v = A / C, v diventa infinita.

Ciò significa, per fare un esempio concreto, che un uomo che cammini con velocità finita su di un treno, mentre il treno si muove con velocità finita rispetto ai binari, potrebbe finire col muoversi rispetto agli stessi binari con velocità infinita.

Per evitare questa contraddizione si deve porre il seguente postulato di finitezza: *la composizione di due velocità finite deve essere sempre una velocità finita.*

È un postulato che può assumere anche un ruolo del tutto generale: qualunque combinazione di entità finite può produrre solo entità finite.

L'eliminazione della comparsa di velocità infinite conduce necessariamente all'introduzione di una velocità massima I tale che sia $I < A / C$: così nessun mobile potrà mai raggiungere la velocità critica che dà luogo alla contraddizione.

Ma come individuare questa velocità massima? In un modo semplicissimo, perché I gode della notevole proprietà di essere una costante, cioè di avere lo stesso valore in tutti i sistemi di riferimento R_i. Siano infatti I_1 e I_2 le velocità massime in R_1 e in R_2, e sia $T(I_1)$ la trasformata di I_1 in R_2: allora dovrà essere $T(I_1) \leq I_2$. Ma se fosse $T(I_1) < I_2$, in R_2 vi sarebbe almeno una velocità V_2 tale che $T(I_1) < V_2 < I_2$, e quindi, ritornando in R_1 con la trasformazione inversa, sarebbe $T^{-1}\,T(I_1) < T^{-1}(V_2)$, cioè $I_1 < V_1$, il che è impossibile perché I_1 è la velocità massima in R_1. Ne consegue $T(I_1) = I_2$.

Sia $I_2 < I_1$: ritornando in R_1 sarà $T^{-1}\,T(I_1) = T^{-1}(I_2) < T^{-1}(I_1)$, cioè $I_1 = I_1 < V_1$ che è impossibile. Analogamente si prova che è impossibile che sia $I_1 < I_2$.

Allora dovrà essere $I_2 \geq I_1$ e $I_1 \geq I_2$, da cui $I_1 = I_2$.

I dunque deve essere una costante, o più precisamente un'invariante della proiettività (6). E difatti una proiettività tra forme sovrapposte ammette al più due elementi uniti, che si possono trovare ponendo nella (7) $x = x' = y$ per ricavare l'equazione

$$(8) \qquad ay^2 + (b+c)y + d = 0.$$

Così allo stesso modo dalla (6) ponendo $v = v = I$ si ottiene la

$$(9) \qquad I^2C - I(A-D) - B = 0.$$

Ora però, a differenza della (8) in cui, dati a, b, c, d si deve trovare l'incognita y, nella (9) dato I si devono trovare i coefficienti A, B, C, D. Poiché le due soluzioni della (9) dovranno essere uguali e di segno contrario, la formula risolutrice

$$\frac{(A - D) \pm \sqrt{(A - D) + 4BC}}{2C}$$

impone che sia $A = D$ e quindi

$$I = \pm \frac{\sqrt{4BC}}{2C}, \text{ cioè } B = CI^2.$$

Con i valori così determinati di B e D la (5) diventa

$$(10) \qquad v = \frac{Av - CI^2}{A - Cv}.$$

che risolta rispetto a v fornisce la

$$(11) \qquad v = \frac{Av + CI^2}{Cv + A}.$$

Se ora in questa relazione si sostituisce alla velocità generica v proprio la velocità V di R_2 rispetto a R_1, v diventa la velocità di R_2 rispetto a se stesso, cioè diventa zero.

Da $0 = \dfrac{AV + CI^2}{CV + A}$ si può così dedurre

$C = -AV / I^2$, valore che introdotto nella (10) dà finalmente la formula della composizione relativistica delle velocità

$$(12) \qquad v = \frac{Av + AV}{A + AvV/I^2} = \frac{v + V}{1 + vV/I^2}.$$

È interessante notare come questa formula possa venire ricavata prima ancora di avere determinato sia la variabile A, sia il determinante Δ. In tal modo si sono rese uguali anche le quattro "colonne" iniziali A, B, C, D, poiché le (2) ora diventano

$$(13) \qquad \left| \begin{array}{l} S = As - AVt \\ T = -AVs/I^2 + At \end{array} \right.$$

Per avere una riprova che la velocità massima I è proprio un invariante della (12), basta porre

$$vx = \frac{vx + V}{1 + vx\,V/I^2},$$

$$\text{cioè} \quad vx\,I^2 + vx\,^2V = vx\,I^2 + VI^2,$$

$$\text{da cui} \quad vx = \pm I.$$

Si ritrova così per via analitica la proprietà, già prima sinteticamente dimostrata,